الثانوية التاهيلية ابطيح ايت اورير الحوز	سلسلة حول **المتتاليات العددية**	✓ نهايات متتايات ترجعية ✓ مصاديق التقارب ✓ متتايات متحاذية.
ذ محمد بنيـــو	الثانية علوم رياضية	الموسم الدراسي 2012/2011

التمرين 01:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: u_0 حيث $u_0 > 5$ و العلاقة الترجعية: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n^2)$.

1- بين ان المتتالية (u_n) تزايدية.

2- بين ان : $\forall n \in \mathbb{N}; n > 5 \Rightarrow u_n > n$

3- استنتج و صغ خاصية تترجم بها الاستنتاج.

التمرين 02:

احسب نهاية المتتاليتين التاليتين:

$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ و $v_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n+n^2}$.

التمرين 03:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 3$ و العلاقة الترجعية: $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1- بين انه اذا كانت المتالية متقاربة فإن نهايتها l حل للمعادلة $x^2 + x - 2 = 0$.

2- لتكن $(v)_n$ المتتالية المعرفة لكل n من $\mathbb{N}$ ب : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

- بين ان $(v)_n$ هندسية متقاربة و حدد نهايتها.

3- استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

التمرين 04:

A. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. احسب الحدود الاربعة الاولى للمتتالية (u_n) .
2. اثبت ان المتتالية (u_n) تزايدية.
3. اثبت ان لكل k>1 : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

   استنتج ان المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 2 .
4. المتتالية (u_n) متقاربة .علل ذلك.

تاريخ: في سنة 1748 للميلاد برهن العالم Euler ان المتتالية (u_n) متقاربة و نهايتها $\frac{\pi^2}{6}$.

B. نعتبر المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ المعرفتين ب: $v_n = u_n + \frac{1}{n+1}$ و $w_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. حدد نهاية كل من المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$.
2. أ- تحقق ان لكل $n \geq 1$: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$.

   ب- استنتج تغيرات المتتالية $(v_n)_n$.
3. اثبت ان المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متحاذيتان .
4. استنتج ان: $v_n \leq \frac{\pi^2}{6} \leq w_n$.
5. اثبت ان لكل $n \geq 1$: $0 \leq w_n - v_n \leq \frac{1}{n^2}$.
6. اوجد عددا صحيحا طبيعيا p حيث لكل $n \geq p$ ، دقة التاطير $v_n \leq \frac{\pi^2}{6} \leq w_n$ اصغر من او تساوي 10^{-2} .

التمرين 05:

نعتبر عددين a و b حقيقيين حيث $0 < a < b$ و متتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ معرفتين بما يلي: $u_0 = a$، $v_0 = b$، و
$u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$

اصطلاح : u_{n+1} يسمى الوسط التوافقي للعددين u_n وv_n

v_{n+1} يسمى الوسط الحسابي للعددين u_n وv_n او المعدل.

1. اثبت ان لكل $n \geq 0$ ، المتتاليتان $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ موجبتان قطعا .
2. اثبت ان لكل $n \geq 0$ ، $u_n < v_n$.
3. بين لكل x و y حيث $0 < x < y$: $\frac{y-x}{2(x+y)} < \frac{1}{2}$.
4. استنتج ان $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
5. أ- اثبت بالترجع ان لكل $n > 0$ ، $v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

   ب—استنتج نهاية $v_n - u_n$.
6. بين ان المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متحاذيتان .
7. اثبت ان لكل $n \geq 0$ ، الجداء $u_n v_n$ ثابت. و استنتج نهاية كل من $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$.
8. اطر الى 0.01 العدد $\sqrt{6}$.

التمرين 06:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة كاتالي: $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1- بين ان $\forall k \in \mathbb{N}^* \; ; \; \sqrt{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}$:
2- استنتج ان $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$.
3- نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة كاتالي: $\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

بين ان $(v_n)_{n\geq1}$ تزايدية و متقاربة .

التمرين 07:

1- بين ان لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، المعادلة $\tan\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2nx}$: $x \in]0;1[$ يرمز له بالرمز x_n .
2- بين ان المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية قطعا .
3- اينتج ان المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ متقاربة .
4- بين ان $\lim_{+\infty} x_n = 0$.
5- احسب $\lim_{+\infty} \sqrt{n}x_n = 0$

التمرين 08

1. نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة كالتالي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \sqrt[3]{9(u_n - 1)}$ اذا كان $n > 0$.
بين ان $(u_n)_n$ تزايدية .
2. نعتبر المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة كالتالي: $u_0 = 3$ و $v_{n+1} = \sqrt[3]{9(v_n - 1)}$ اذا كان $n > 0$.
بين ان $(u_n)_n$ تناقصية .
2. نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب : $f(x) = \sqrt[3]{9(x-1)}$.
بين ان $\forall (x;y) \in [2;3]^2 : x > y \Longrightarrow f(x) - f(y) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(x-y)$
3. استنتج ان $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < v_n - u_n < 3^{\frac{n}{3}}$.
4. بين ان $\forall n \in \mathbb{N}; 2 < v_n < 3$.
5. استنتج ان $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متقاربتان و ان نهايتهما حل للمعادلة $x^3 - 9x + 9 = 0$

Citation 01

Je ne pourrai jamais m'amuser les dimanches, car jen'arrive pas à oublier que le lendemain j'ai école.

Bill Watterson

المراجع:

- دروس و فروض سابقة للثانية علوم رياضية.
- كتب مدرسية مختلفة.
- موقع الاستاذ محمد مستولي.
- موقع الاستاذ العمداوي.
- مواقع اجنبية فرنسية.