الاكاديمية الجهوية للتربية و التكوين جهة مراكش–تانسيفت –الحوز الثانوية التاهيلية ابطيح ايت اورير	سلسلة حول :الدوال اللوغاريتمية و الدوال الاسية.	المستوى: الثانية علوم رياضية أ
	الموسم الدراسي 2012/2011	ذ محمد بنيـــــــو

التمرين01 :

في نفس المعلم المتعامد المنتظم أنشئ منحنيي الدالتين $x \to \ln(x)$ و $x \to \exp(x) = e^x$ و المتقيمين $(D_1): y = x - 1$ و $(D_2): y = x + 1$.

تحقق ان : $\forall x \in \mathbb{R}; \ln(x) \leq x - 1$ و $\forall x \in]0; +\infty[; x + 1 \leq \exp(x)$.

التمرين02 :

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات الاتية :

❖ $\frac{\ln|3-x|}{\ln(x-1)} = \frac{1}{2}$ و $e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين :

❖ $(E): e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$ و $(F): e^{2x} - e^{2+x} - e^{2-x} + 1 < 0$

التمرين03 :

نعتبر الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = x^n e^{-x}$ حيث n من $\mathbb{N}^*$.

1. ادرس تغيرات الدالة f .
2. استنتج ان لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\forall x \in]0; +\infty[; e^x > \left(\frac{x}{n}\right)^n$

التمرين04 :

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1. بين ان $(a + b)^n > a^n + na^{n-1}b$.

استنتج ان $(n + 1)^n > 2n^n$ و $(n + 1)^{10n} > 1000n^{10n}$

2. اثبت ان $\ln(n + 1) > \frac{3}{10n} + \ln(n)$
3. اثبت ان $\ln(n!) > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

التمرين05 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$.

ادرس و مثل الدالة f – الاتصال ،الاشتقاق ن التغيرات ، المقاربات ،....

التمرين06 :

نعتبر الدالة $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ حيث k عدد حقيقي معلوم.

1. بين ان الدالة f_k تقبل قيمة قصوية عند $x = 1 - k$.
2. نضع M_k نقطة منحنى f_k التي افصولها $1 - k$. بين ان النقطة M_k تنتمي الى المنحنى الذي معادلته $y = e^{-x}$.

www.2smabtih.web.com

3. انشئ في نفس المعلم المنحنيين : $y = (x+k)e^{-x}$ و $y = e^{-x}$

التمرين07 :

الجزء الاول

نقبل ان $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

بين ان $\lim_{+\infty} xe^{-x} = 0$

الجزء الثاني

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (1+x)e^{-x}$ و $\mathcal{C}$ منحناها في م م م وحدته 4 سم.

1. ادرس تغيرات الدالة f و نهاياتها عند محدات مجموعة تعريفها.انشئ جدول تغيرات الدالة f.
2. انشئ منحنى الدالة f.

الجزء الثالث دراسة اسرة دوال عددية.

لكل عدد صحيح نسبي k ، نضع f_k الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$ و $(\mathcal{C}_k)$منحناها في م م م .

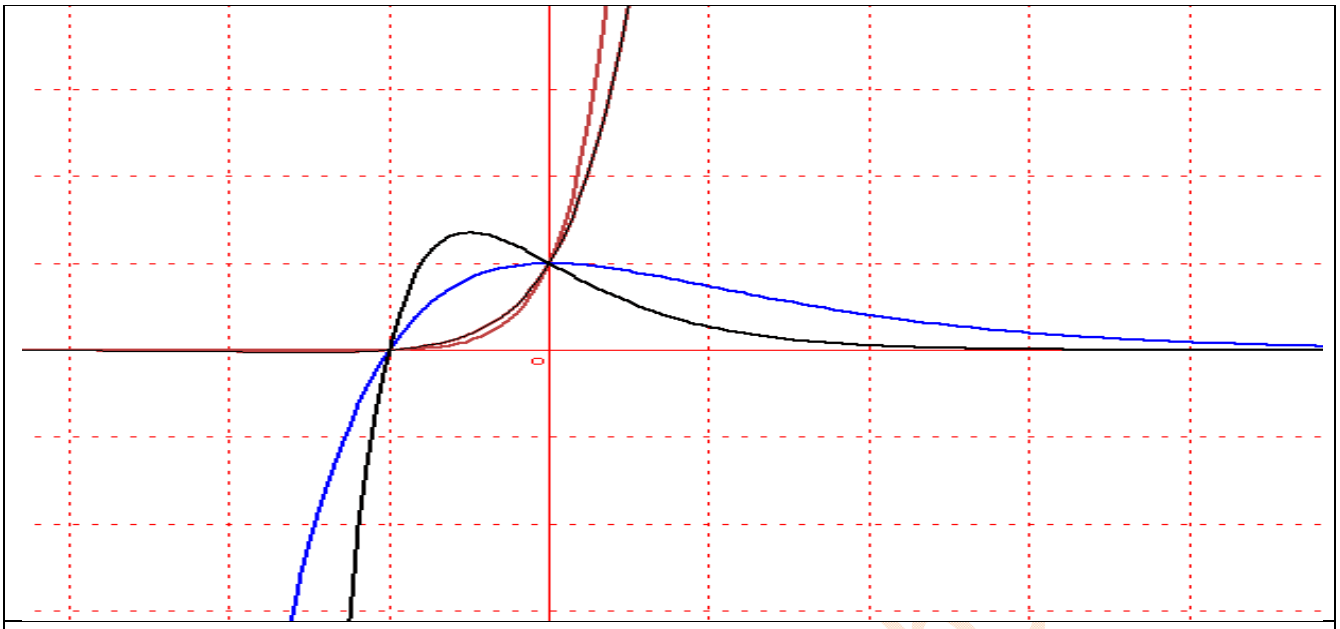
1. أ– ما هي طبيعة الدالة f_0 ؟

   ب– حدد نقط تقاطع $(\mathcal{C}_0)$ و $(\mathcal{C}_1)$ ، و تحقق ان هذه النقط تنتمي الى جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$.
2. ادرس – حسب قيم x – اشارة التعبير $(x+1)(e^x-1)$، و استنتج حسب قيم k الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$

   و $(\mathcal{C}_{k+1})$.
3. احسب $f'_k(x)$ و استنتج تغيرات الدالة f_k .لاحظ الحالتين $k > 0$ و $k < 0$.
4. المنحنيات الاربعة التالية $(\mathcal{E})$،$(\mathcal{F})$،$(\mathcal{H})$و$(\mathcal{K})$ تمثل منحنيات الدالة f_k من اجل 4 قيم مختلفة 1−،3−، 1 و 2 للمتغير k .

   تعرف على هذه المنحيات مبررا ذلك.

www.2smabith.webs.com



التمرين08 :

الجزء الاول

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}, t > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1. بين ان g متصلة في 0 على اليمين .
2. نعتبر الدالة h المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي: $h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$.

أ- بين ان : $0 \leq h''(t) \leq t$.

ب- استنتج ان $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$.

ج- استنتج تاطيرا للعدد $\frac{g(t)-g(0)}{t}$ ثم بين ان g قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين .

3. ادرس تغيرات الدالة g .

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{-x}-x^{-2x}}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. بين ان لكل $x > 0$ ، $f'(x) \leq 0$.
2. تحقق ان لكل $x > 0$ ، $f(x) = 2g(2x) - g(x)$.
3. استنتج ان الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .
4. انشئ منحنى الدالة f في المستوى منسوب الى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

التمرين09 :

www.2smabtih.web

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x} \; ; x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} \; ; x > 0 \end{cases}$$

و © منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجزء الاول:

1) أ- اثبت ان الدالة f متصلة في $x_0 = 0$ على اليسار.

ب- ادرس اتصال الدالة f في x_0 على اليمين.

2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة x_0 على اليسار.

الجزء الثاني:

1) أ- اثبت ان $\forall x \in IR^{*-} : (2x^2-1)e^{x^2}+1>0$ (يمكن دراسة الدالة ψ المعرفة على IR^{*-} بما يلي: $\psi(x) = (2x^2-1)e^{x^2}+1$)

أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

2. ا- بين ان $\forall x \in IR^{*+} : \dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x)$ (يمكن اعتبار الدالة $t \to \ln(1+t)$ و تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية)

ب- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$

3) أ- اعط جدول تغيرات الدالة f .

ب- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى © .

ج- أنشئ المنحنى © .

التمرين10 : عن موقع www.mathsland.com

الجزء الاول

نعتبر f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$: $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1}$.

1. لتكن φ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$: $\varphi(x) = \ln(x) + x + 1$.

أ- ادرس تغيرات الدالة φ .

ب- بين ان المعادلة $\varphi(x = 0$ تقبل حلا وحيدا β محصورا بين 0.27 و 0.28 .

2. اكتب $f'(x)$ بدلالة $\varphi(x)$ و استنتج تغيرات الدالة f .

3. احسب نهايتي f عند 0 و $+\infty$.

الجزء الثاني

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

الهدف من هذا الجزء هو دراسة المعادلة $f(x) = n$.

www.2smabtih.webs.com

1. بين ان لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n .

نضع $\alpha_1 = \alpha$

2. مقارنة العددين α_n و e^n .

أ- بين ان $f(e^n) \leq n$ واستنتج ان $\alpha_n \geq e^n$.

ب- بين ان $f(\alpha_n) = n$ تكافئ $\ln\frac{\alpha_n}{e^n} = \frac{n}{\alpha_n}$. العلاقة 1

ت- استنتج من السؤال السابق نهاية التعبير $\frac{\alpha_n}{e^n}$.

3. مقارنة العددين α_n و $e^n + n$.

نكتب العدد α_n على الشكل $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n)$ حيث $\varepsilon_n \geq 0$.العلاقة 2

أ- باستعمال العلاقة 1 ، اكتب $(1 + \varepsilon_n)\ln(1 + \varepsilon_n)$ بدلالة n .

ب- بين ان لكل $t \geq 0$ ، $0 \leq (1 + t)\ln(1 + t) - t \leq \frac{t^2}{2}$

ج-استنتج من السؤالين السابقين ان لكل $n \geq 1$ ، $\varepsilon_n \leq ne^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{{\varepsilon_n}^2}{2}$

ثم $0 \leq ne^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2}e^{-2n}$ العلاقة 3

د- باستعمال السؤالين السابقين ،حدد نهاية $e^n + n - \alpha_n$.

www.2smabtih.weebly.com