

|                                   |                           |   |
|-----------------------------------|---------------------------|---|
| المستوى:<br>الثانية علوم رياضية أ | سلسلة حول الاعداد العقدية | الاكاديمية الجهوية للتربية و التكوين<br>جهة مراكش-تانسيفت -الحوز<br>الثانوية التاهيلية ابطيج<br>ايت اورير |
| ذ محمد بنيو                       | الموسم الدراسي 2012/2011  |   |

### التمرين 01 :

اكتب على الشكل الجبري الاعداد العقدية التالية:

$$\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}, \frac{3+6i}{3-4i} + \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2, \frac{3+6i}{3-4i}$$

### التمرين 02 :

1. احسب معيار و عمدة العددين العقديين التاليين :  $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$  و  $v = 1 - i$  ثم استنتج معيار و عمدة العدد العقدي  $w = \frac{u}{v}$ .

2. حدد معيار و عمدة كل من العددين :  $e^{i\alpha}$  و  $e^{2i\alpha}$ .

3. أ- حدد الجدرين المربعين للعدد  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$  و استنتج قيمة كل من  $\sin \frac{\pi}{8}$  و  $\cos \frac{\pi}{8}$

ب- حدد قيمة كل من  $\sin \frac{\pi}{12}$  و  $\cos \frac{\pi}{12}$

### التمرين 03 :

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلات التالية :

$$(E_1): z^2 + z + 1 = 0, (E_2): z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0,$$

$$(E_3): z^2 - \sqrt{3}z - i = 0, (E_4): z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0,$$

$$(E_5): z^4 + 10z^2 + 169 = 0$$

### التمرين 04 :

1. حدد الجذور من الرتبة 3 للاعداد العقدية :  $1$  ،  $2 - 2i$  و  $11 + 2i$

2. حدد الجذور من الرتبة 5 للعدد  $2 - 2i$  ، احسب مجموعها ثم مثلها على دائرة.

### التمرين 05 :

$$z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 \text{ و } z_1, z_2, z_3 \text{ اعداد عقدية مختلفة مثلى مثلى}$$

1. عبر عن  $z_2$  و  $z_3$  بدلالة  $z_1$ .

$$2. \text{ اكتب على الشكل القطبي حلول المعادلة : } z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

### التمرين 06 :

حدد في كل حالة مجموعة الاعداد العقدية  $z$  التي تحقق :

$$\text{أ- } \left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1 \quad \text{ب- } \left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ج- } (z-i)(\bar{z}+1) \in \mathbb{R} \quad \text{د- } \frac{z^2}{z+i} \in i\mathbb{R}$$

### التمرين 07 :

ليكن  $z$  عددا عقديا معياره  $p$  و عمدته  $\theta$  و ليكن  $\bar{z}$  مرافقه.  
احسب  $(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n)$  .

### التمرين 08 :

1. اخطط  $\sin 5x$  و  $\cos 5x$

### التمرين 09 :

1. نعتبر العدد العقدي  $u = 1 + i$  .  
اكتب  $u$  و  $\bar{u}$  كتابة اسية.
2. ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا. نضع  $S_n = u^n + \bar{u}^n$  .  
اكتب  $S_n$  كتابة اسية و استنتج ان  $S_n = \lambda_n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$  حيث  $\lambda_n$  عدد حقيقي يجب كتابته بدلالة  $n$  .
3. حدد قيمة  $n$  كي يكون  $S_n = 0$  .
4. اثبت انه إذا كان  $n$  زوجيا فإن  $S_n$  عدد صحيح نسبي.

### التمرين 10 :

- المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  .
- A و B نقطتان افصولاهما على التوالي 2 و -2 . نربط كل نقطة M ذات اللق  $z$  المخالف ل 2 بالنقطة N ذات اللق  $\bar{z}$  و بالنقطة M' ذات اللق  $z' = \frac{2z-4}{\bar{z}-2}$  .
1. احسب  $z'$  و  $|z'|$  من اجل  $z = 5$  ثم من اجل  $z = 1 + i$  .
  2. اول هندسيا العددين :  $|z-2|$  و  $|\bar{z}-2|$  . اثبت ان لكل  $z \neq 2$  ،  $|z'| = 2$  . استنتج موقع النقطة M' .
  3. حدد المجموعة التالية :  $E = \{M(z)/M' = B\}$  .
  4. نضع  $\overrightarrow{Z_{\overline{BM'}}}$  و  $\overrightarrow{Z_{\overline{AM}}}$  لحقا المتجهتين  $\overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{BM'}$  . بين ان لكل نقطة M من  $E \setminus \{A\}$  :  $\frac{Z_{\overline{AM}}}{Z_{\overline{BM'}}} \in \mathbb{R}$  .  
أول هندسيا هذه النتيجة.
  5. لتكن M من  $E \setminus \{A\}$  ، اقترح طريقة لإنشاء النقطة M' .

### التمرين 11 :

- المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$
- نعتبر التطبيق  $f$  الذي يربط كل نقطة  $M(z)$  بالنقطة  $M'(f(z))$  حيث  $f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$  .
1. بين ان مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق  $f$  مستقيم (d) .

2. اثبت ان العدد  $\frac{f(z)-z}{1-i}$  عدد حقيقي .
3. استنتج ان  $M'$  نقطة من مستقيم  $(\Delta)$  موجه بالمتجهة  $\vec{u} - \vec{v}$  .
4. بين ان لكل  $z$  ،  $f(f(z)) = f(z)$  .
5. استنتج مما سبق ان  $M'$  نقطة تقاطع (d) و  $(\Delta)$  .
6. اعط العناصر المميزة للتطبيق  $f$  .

#### التمرين 12 :

- المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$
- نربط كل عدد عقدي  $z \neq -i$  بالعدد العقدي  $Z = \frac{z+2}{-i(z+i)}$  .
1. حدد  $Z_0$  من اجل  $z = i$  و حدد معيار  $Z_0$  .
  2. نضع  $Z = U + iV$  و  $z = x + iy$  حيث  $U, V, x, y$  اعداد حقيقية  $A$  و  $B$  نقطتان لحاقهما على التوالي  $-2$  و  $-i$  .
  - أ- حدد و مثل هندسيا :  $(C) = \{M(z)/Z \in \mathbb{R}\}$
  - ب- حدد و مثل هندسيا :  $(D) = \{M(z)/Z \in i\mathbb{R}\}$  .
  - ج- حدد و انشئ :  $(E) = \{M(z)/|Z| = 1\}$  .

#### التمرين 13 :

- المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ( $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1cm$ ) .
- نعتبر متتالية النقط  $M_n$  التي الحاقها  $Z_n$  حيث :  $\begin{cases} Z_0 = 8 \\ Z_{n+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} Z_n \end{cases}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  .
1. احسب معيار و عمدة العدد العقدي  $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$  . اكتبه على الشكل المثلثي .
  2. احسب  $Z_1, Z_2, Z_3$  و تحقق ان  $Z_3$  تخيلي صرف .
  - انشئ النقط  $M_0, M_1, M_2, M_3$  .
  3. احسب  $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$  و استنتج ان المثلث  $OM_nM_{n+1}$  قائم الزاوية و ان  $|Z_{n+1} - Z_n| = \frac{\sqrt{3}}{3} |Z_{n+1}|$  .

#### التمرين 14 :

- A - نعتبر الحدودية P المعرفة ب :  $P(z) = z^3 + (3 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3}$  حيث  $z$  عدد عقدي .
1. تحقق ان :  $P(\sqrt{3} - 1) = 0$  .
  2. حل المعادلة :  $P(z) = 0$  .
  3. اكتب الجذور على الشكلين الجبري و المثلثي .

- B - المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  .
- نعتبر النقط A ، B و C التي الحاقها على التوالي  $z_A = \sqrt{3} - 1$  ،  $z_B = i\sqrt{3} - 1$  و  $z_C = -i\sqrt{3} - 1$  .
1. انشئ النقط A ، B و C .
  2. احسب المسافتين AB و AC و قياس الزاوية (BAC) و استنتج طبيعة المثلث ABC .
  3. احسب  $\arg \frac{z_B - z_A}{z_B}$  ثم  $\frac{z_B - z_A}{z_B}$  و استنتج القيم الحقيقية للعددين  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$  .

#### التمرين 15 :

1. نعتبر العدد العقدي  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  ، اكتب  $\omega$  و  $\omega^2$  عل الشكل الجبري .
2. بين ان :  $\omega^2 = 0$  و  $1 + \omega + \omega^2 = 0$  و  $\omega = \omega^2$  .
3. بين ان :  $|\omega| = |1 + \omega|$  . هل يحقق  $\omega$  نفس المتساوية؟
4. نعتبر العدد العقدي z الذي يحقق  $|z| = |1 + z|$  . تحقق ان  $Re(z) = -\frac{1}{2}$  .
5. نعتبر العدد العقدي z حيث  $z \neq -1$  و  $z \neq 0$  و يحقق  $Arg(z) = Arg(1 + z)$  . بين ان  $z \in \mathbb{R}$  .

#### التمرين 16 :

- ليكن n عددا صحيحا طبعيا اكبر من او يساوي 2 .
- حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية :  $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$

#### التمرين 17 :

- ليكن n عددا صحيحا طبعيا اكبر من او يساوي 2 .
1. تحقق ان لكل k من  $\mathbb{N}$  :  $\left| \sin \frac{k\pi}{n} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right|$  .
  2. استنتج تعبيرا مبسطا للعدد  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$  .

#### التمرين 18 :

- المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ( $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2cm$ )
- ليكن z عددا عقديا. نربط كل عدد Z بالعدد  $Z'$  حيث  $Z' = z - i$  و  $Z = z - 1$  .
- لتكن النقط  $m'$  ،  $M'$  و  $M$  صور الاعداد z ،  $Z'$  و  $Z$  .
1. نضع  $z = \frac{3+i}{4}$  .
    - أ- احسب Z و  $Z'$  .
    - ب- احسب  $|Z' - z|$  و  $|Z' - Z|$  .
    - ج- مثل النقط m ،  $M'$  و  $M$  . ما هي طبيعة المثلث  $mmm'$  ؟
  2. نضع  $z = x + iy$  حيث x و y عددين حقيقيين .
    - أ - حدد الجزأين الحقيقي و التخيلي للجداء  $ZZ'$  .

ت-حدد و مثل المجموعة :  $E = \{m/ZZ' \in \mathbb{R}\}$

التمرين 19 : عن موقع mathsland.com

ليكن  $r$  عددا حقيقيا موجبا قطعاً و  $\alpha$  عددا حقيقيا من المجال  $]-\pi; \pi[$  .

1. حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 2r\cos(\alpha)z + r^2 = 0$  .

نضع  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة . حدد معيار و عمدة كل من الحلين .

2. احسب  $z_1^n$  و  $z_2^n$  ثم استنتج تعبير  $P_n = z_1^n + z_2^n$  .  $(n \in \mathbb{N}^*)$  .

3. حالة خاصة : نأخذ  $r = \frac{1}{2}$  و  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$  .

✓ اوجد علاقة بين  $P_n$  و  $P_{n+1}$  .

✓ حدد نهاية  $P_n$

التمرين 20 :

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ( $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1cm$ )

نعتبر العددين العقدين  $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$  و  $z_0 = 6 + 6i$  و النقطة  $A_0$  صورة  $z_0$  .

لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  نضع :  $z_n = a^n z_0$  و  $A_n$  صورة  $z_n$  .

1. اكتب  $z_1$  و  $a^2$  على الشكل الجبري . اكتب  $z_1$  على الشكل الاسي و بين ان  $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$  .

2. اكتب  $z_3$  ثم  $z_7$  بدلالة  $z_1$  و  $a^2$  ، استنتج  $z_3$  و  $z_7$  على الشكل الاسي .

3. ارسم النقط  $A_0, A_1, A_3$  و  $A_7$  صور الاعداد  $z_0, z_1, z_3$  و  $z_7$  .

4. لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ، نضع  $|z_n| = r_n$  .

بين ان  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$  و استنتج طبيعة و نهاية المتتالية  $(r_n)_n$  .

اول هندسيا النتيجة المحصلة .

5. حدد اصغر الاعداد الصحيحة الطبيعية  $p$  حيث  $OA_p < 10^{-3}$  .